Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj – Bouira –
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département d'Informatique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند الحاج - البويرة
كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Module : probabilités et statistique

II/ Lois continues usuelles:

① Loi Uniforme:

Une variable aléatoire réelle X est dite suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, notée $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$, si la densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a,b] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque: La fonction de répartition F de X est:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x < b \\ 1, & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Proposition: Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Preuve:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$$

d'où $E(X) = \frac{1}{b-a} x^2/2 \Big|_a^b = \frac{1}{2(b-a)} \times (b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2}.$

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Calcul le moment d'ordre 2 :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

d'où
$$V(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{12}$$

2) Loi exponentielle :

Une variable aléatoire réelle X est dite suit la loi exponentielle de paramètre α ($\alpha > 0$), notée $X \rightsquigarrow exp(\alpha)$, si la densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & si\ x \geq 0 \\ 0, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Proposition: si X suit la loi exponentielle de paramètre α, son espérance mathématique et sa variance sont données par:

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}, \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

* $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx$

On fait l'intégration par parties.

On pose: $\begin{cases} f = x \\ g' = e^{-\alpha x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f' = 1 \\ g = \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha x} \end{cases}$

d'où $E(X) = -x e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$

$$= 0 - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

d'où $\boxed{E(X) = \frac{1}{\alpha}}$

* Le moment d'ordre 2 est:

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx$

On intégrée par parties. $f = x^2 \Rightarrow f' = 2x$

$g' = \alpha e^{-\alpha x} \Rightarrow g = - e^{-\alpha x}$

d'où $E(X^2) = - x^2 e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx$

$$= \frac{2}{\alpha} \int_0^{+\infty} \alpha x e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} E(X) = \frac{2}{\alpha^2}$$

et par suite:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

3) Loi de Cauchy:

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Cauchy de paramètre a ($a>0$) si elle a pour densité la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2+a^2}, \quad a>0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

On notera: $X \rightsquigarrow \mathcal{C}(a)$

Remarques:

La moyen de $X \rightsquigarrow \mathcal{C}(a)$ n'existe pas car l'intégrale $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ est diverge.

4) Loi Gamma:

Définition: (Fonction Gamma):

Soit $\alpha > 0$, la fonction gamma, notée $\Gamma(\alpha)$, est définie par:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx.$$

propriétés:

Soit α un réel strictement positif, alors:

i) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$

ii) $\Gamma(n+1) = n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Définition:

Une variable aléatoire X continue suit une loi Gamma si la densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, e^{-\frac{x}{\beta}}\, x^{\alpha-1}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

α et β sont applée de paramètre de la loi Gamma et on note $X \rightsquigarrow \Gamma_{\alpha,\beta}$

proposition: Si $X \rightsquigarrow \Gamma_{\alpha,\beta}$, alors:

$$E(X) = \alpha\beta \quad \text{et} \quad V(X) = \alpha\beta^2$$

Deux cas particuliers:

a| pour $\alpha = 1$, on obtient la loi exponentielle $X \rightsquigarrow \exp\left(\frac{1}{\beta}\right)$

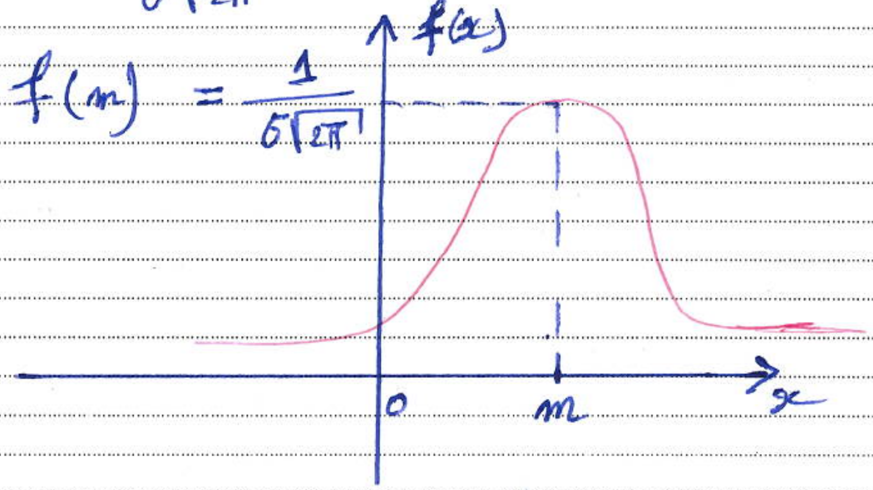
b| pour $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = 2$, la loi $\Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est appelée loi de Chi-deux à n degrés de liberté

on notera: $X \rightsquigarrow \chi^2_n$

5/ Loi Normale (ou Laplace - Gauss)

Définition : On dit que la variable aléatoire X suit la loi Gaussienne ou Normale de paramètres m, σ^2, notée $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$, si la densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Cas particulier :

Pour $\sigma = 1$ et $m = 0$, la loi normale de $X \rightsquigarrow N(0,1)$, est appelée loi normale centrée réduite ou loi normale standard

donc la densité de probabilité est donnée par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

La fonction de répartition de $X \rightsquigarrow N(0,1)$ est :

$$\Phi(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Donc les valeurs de Φ sont données par les tables.

Exemple:

Si X suit la loi $N(0,1)$

Calculer $P(X \leq 0,34)$ et $P(1,2 \leq X \leq 2,53)$

D'après la table de la loi $N(0,1)$, on obtient:

1) $P(X \leq 0,34) = 0,6331$.

2) $P(1,2 \leq X \leq 2,53) = P(X \leq 2,53) - P(X \leq 1,2)$

$= 0,9943 - 0,8849$

$= 0,1094$.